정육면체를 사랑하는 사람

Doju

문제

- $1 \leq K \leq 10^{18}$인 K가 주어질 때, 부피가 K 이상이고 각 변의 길이가 모두 자연수인 직육면체 중 겉넓이가 가장 작은 것을 구하여라.

해법

- 세 변의 길이를 A, B, C로 놓고, 일관성을 잃지 않고 $A \le B \le C$라고 하자.
- A가 정해졌을 때, $A \le B \le \left\lfloor \sqrt{\frac{K}{A}} \right\rfloor$인 모든 B를 확인해 보면 답을 구할 수 있다.
- 그러나 $1 \le A \le \lfloor \sqrt[3]{K} \rfloor$인 모든 A를 확인할 수는 없다.

가정

- 자연수 K에 대해, $0 < A \leq (\sqrt[6]{K} - 1.5)^2$일 경우 고려할 필요가 없다.
  - $K = 1, K = 2$인 경우는 자명하게 성립한다.

증명

- A, B, C가 주어질 때 겉넓이는 $2AB + 2BC + 2CA = 2A(B+C) + 2BC$이다.
- 세 변이 모두 자연수여야 한다는 조건을 배제할 때, A가 정해져 있을 때의 최적해를 구한다.
- $ABC \geq K \ \ \therefore BC \geq \frac{K}{A}$
- $S = 2A(B+C) + 2BC \geq 4A\sqrt{BC} + 2BC$ (산술-기하 평균)
- $\therefore S \geq 4\sqrt{AK} + \frac{2K}{A}$, 등호 조건은 $B = C = \sqrt{\frac{K}{A}}$

증명

- 한 변의 길이가 $\lceil \sqrt[3]{K} \rceil$인 정육면체는 문제의 조건을 만족한다.
- $\sqrt[3]{K} \leq \lceil \sqrt[3]{K} \rceil < \sqrt[3]{K} + 1$이므로 $6(\sqrt[3]{K} + 1)^2$보다 작은 답이 항상 존재한다.
- 따라서 $4\sqrt{AK} + \frac{2K}{A} \geq 6(\sqrt[3]{K} + 1)^2$인 A는 고려할 필요가 없다.

증명

- $f(A) = 4\sqrt{AK} + \frac{2K}{A}$라고 하자.
- $f(A)$는 $A > 0$ 범위에서 A가 증가할수록 감소하다가 $A = \sqrt[3]{K}$에서 극소점을 찍고 다시 증가함을 미분으로 보일 수 있다.
- $A = (\sqrt[6]{K} - 1.5)^2$일 때 $A \leq \sqrt[3]{K}$이고 $f(A) \geq 6(\sqrt[3]{K} + 1)^2$일 경우 증명이 완료된다.

증명

- $(\sqrt[6]{K}-1.5)^2 \leq \sqrt[3]{K}$를 만족하는 K의 범위를 구하자.
- $\sqrt[3]{K}-3\sqrt[6]{K}+2.25 \leq \sqrt[3]{K}$
- $3\sqrt[6]{K} \geq 2.25 \quad \therefore K \geq \frac{3^6}{4^6}$
- 즉 위의 식은 모든 자연수 K에 대해 성립한다.

증명

- $f((\sqrt[6]{K}-1.5)^2) \geq 6(\sqrt[3]{K}+1)^2$를 만족하는 K의 범위를 구하자.
- $4\sqrt{(\sqrt[6]{K}-1.5)^2 K + \frac{2K}{(\sqrt[6]{K}-1.5)^2}} \geq 6(\sqrt[3]{K}+1)^2$
- $K \neq 1.5^6$에 대해 $(\sqrt[6]{K}-1.5)^2 > 0$이 성립한다.
- $4\left(\sqrt[6]{K}-1.5\right)^3\sqrt{K} + 2K \geq 6(\sqrt{K}-1.5\sqrt[3]{K}+\sqrt[6]{K}-1.5)^2$
- $\left(2\sqrt[6]{K}-3\right)^3\sqrt{K} + 4K \geq 3(2\sqrt{K}-3\sqrt[3]{K}+2\sqrt[6]{K}-3)^2$

증명

- 편의상 $L = \sqrt[6]{K}$라고 하자.
- $(2L-3)^3L^3 + 4L^6 \geq 3(2L^3 - 3L^2 + 2L - 3)^2$
- $12L^6 - 36L^5 + 54L^4 - 27L^3 \geq 12L^6 - 36L^5 + 51L^4 - 72L^3 + 66L^2 - 36L + 27$
- $L^4 + 15L^3 - 22L^2 + 12L - 9 \geq 0$

증명

- $g(L) = L^4 + 15L^3 - 22L^2 + 12L - 9$
- 미분을 통해 $L > 0$일 때 $g(L)$이 증가함수임을 보일 수 있다.
- $g(1) = -3$, $g\left(\sqrt[6]{2}\right) \approx -0.4481$, $g(\sqrt[6]{3}) \approx 1.7426$
- 따라서 $K \geq 3$인 모든 자연수에 대해 가정이 성립한다.

결론

- $K = 10^{18}$일 때, $(10^3 - 1.5)^2 = 997002.25$ 이하의 A는 볼 필요가 없다.
- 그러므로 3000개 이하의 A만 확인해도 답을 구할 수 있습니다.